

**Table des matières**

<b>1 Les relations de passage du champ électromagnétique</b>	<b>1</b>
1.1 Charge et densité de courant surfaciques . . . . .	1
1.2 Énoncé des relations de passage . . . . .	1
<b>2 Réflexion sous incidence normale sur un conducteur parfait</b>	<b>3</b>
2.1 Le modèle du conducteur parfait . . . . .	3
2.2 L'onde stationnaire . . . . .	3
2.3 Cavité à une dimension . . . . .	5
<b>3 Complément : réflexion oblique sur une interface</b>	<b>8</b>
3.1 Schéma et notations . . . . .	8
3.2 Application des relations de passage . . . . .	9

**1 Les relations de passage du champ électromagnétique**

On cherche à étudier les discontinuités des champs au voisinage immédiat d'une interface séparant deux milieux.

**1.1 Charge et densité de courant surfaciques**

On considère localement que l'interface est modélisée par une plaque infinie d'épaisseur  $e$  séparant deux milieux de charge et de densités de courants nuls. La plaque est orthogonale à l'axe  $x$  et est comprise entre  $x = 0$  et  $x = e$ .

La plaque infinie est de densité de charge  $\rho$  et de densité de courant  $\vec{j}$ .

Pour décrire l'interface, on suppose que cette plaque est infiniment mince, ce qui implique de faire tendre  $e$  vers 0.

**Définition.** La densité de charge surfacique de l'interface est définie par

$$\sigma = \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^e \rho dx .$$

La densité de courant surfacique de l'interface est définie par

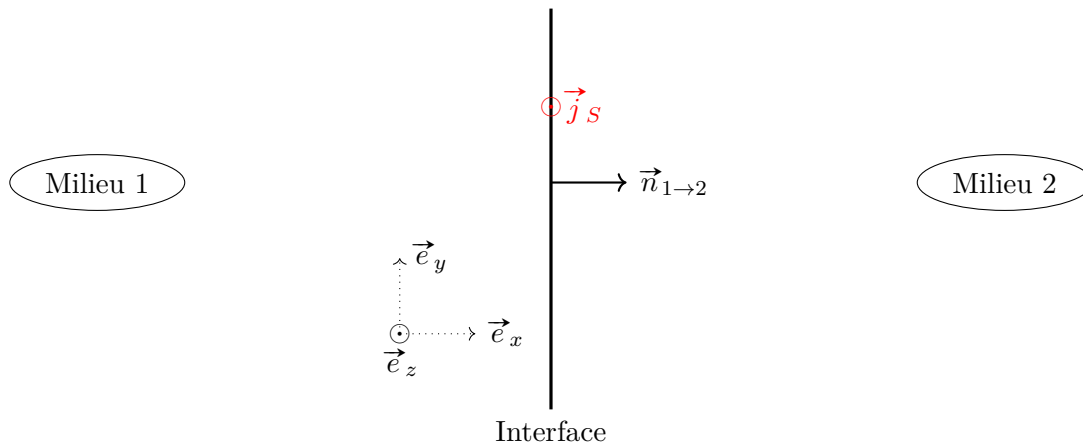
$$\vec{j}_S = \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^e \vec{j} dx .$$

**1.2 Énoncé des relations de passage**

Pour l'étude suivante, on réalise l'étude avec les notations de la figure 1.

**1.2.1 Les composantes normales**

Appliquons le théorème de Green-Ostrogradski à l'équation de Maxwell-Gauss. La surface de Gauss choisie est un cylindre de base infinitésimale  $dS$  compris entre  $x = h > e$  (dans le milieu 2) et  $x = -h$  (dans le milieu 1).



**Fig. 1** – Notations pour l'étude des relations de passage

Il vient

$$\vec{E}(x = h) \cdot dS \vec{e}_x - \vec{E}(x = -h) \cdot dS \vec{e}_x + d\Phi_{E,\text{latéral}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma dS .$$

De même, on peut appliquer le théorème de Green-Ostrogradski à l'équation de Maxwell-Thomson et il vient

$$\vec{B}(x = h) \cdot dS \vec{e}_x - \vec{B}(x = -h) \cdot dS \vec{e}_x + d\Phi_{B,\text{latéral}} = 0 .$$

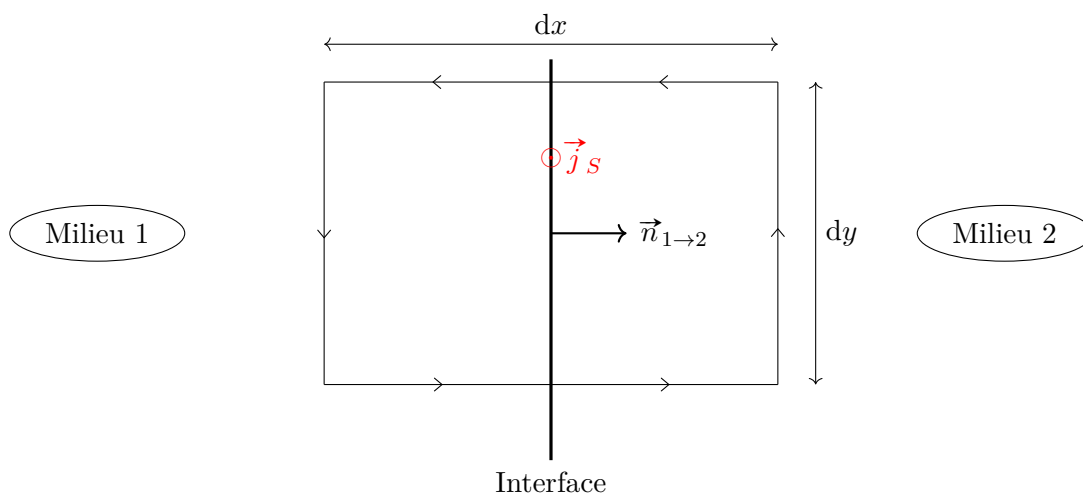
En faisant tendre  $h$  vers 0, les flux latéraux  $d\Phi_{\text{latéral}}$  tendent vers 0 aussi. En effet, les champs étant régis par les équations de Maxwell, ils n'ont pas de raison de diverger en dehors de l'interface.

Il vient donc

$$E_{2,x} - E_{1,x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad B_{2,x} - B_{1,x} = 0 .$$

### 1.2.2 Les composantes tangentielles

Appliquons le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday. Le contour d'Ampère choisi est un rectangle orthogonal à  $\vec{j}_S$ , l'entourant dans le sens direct de côté parallèle à l'interface. La surface infinitésimale entourée par ce contour est  $dx dy$ . Ce contour est représenté figure 2.



**Fig. 2** – Contour d'Ampère pour déterminer les relations de passages tangentielles des champs

On calcule la circulation du champ magnétique sur ce contour, il vient

$$C = B_x(y) dx - B_x(y + dy) dx + B_{2,y} dy - B_{1,y} dy .$$

En appliquant le théorème d'Ampère généralisé, il vient

$$C = \mu_0 j_S dy + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{t} dx dy$$

avec le vecteur  $\vec{t}$  porté par  $\vec{j}_S = j_S \vec{t}$ .

On divise par  $dy$  et on fait tendre  $dx$  vers 0 et il vient

$$B_{2,y} - B_{1,y} = \mu_0 j_S$$

car la dérivée du champ électrique reste bornée.

On peut faire de même sur un contour d'Ampère orthogonal à celui-là. Il vient alors

$$B_{2,z} - B_{1,z} = 0.$$

En appliquant le même raisonnement à l'équation de Maxwell-Faraday, on trouve que les composantes  $y$  et  $z$  du champ électriques sont continues.

### 1.2.3 Conclusion

Les résultats précédents peuvent être condensés dans une écriture vectorielle.

**Propriété.** On note les champs électromagnétique au niveau de l'interface  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  le milieu 1 et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$  le milieu 2. On note  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire orthogonal à l'interface allant du milieu 1 au milieu 2. Les relations de passage indiquent

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}.$$

## 2 Réflexion sous incidence normale sur un conducteur parfait

### 2.1 Le modèle du conducteur parfait

On rappelle que pour le cuivre, la conductivité statique vaut  $\sigma_0 \sim 6 \times 10^7$  S/m. En général, pour les bons conducteurs, cette grandeur est très grande.

**Définition.** Le modèle idéal du **conducteur parfait** suppose que la conductivité statique est infinie.

On a vu dans le chapitre précédent que le champ électrique pénètre dans le métal sur une distance caractéristique  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_0}}$ . Pour le cuivre, on a  $\delta \sim 0.16/\sqrt{\omega}$  en mètres. Pour des pulsations visibles, la fréquence est de l'ordre de  $10^{15}$  Hz. Ainsi, cette distance est rapidement très faible, très inférieure au millimètre. En prenant le conducteur parfait, on a rigoureusement  $\delta = 0$ , le champ électrique ne pénètre pas dans le métal.

On prend donc  $\vec{E} = \vec{0}$ . Or  $\text{rot } E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Donc la dérive par rapport au temps de  $\vec{B}$  est nulle. Comme on néglige les champs statiques, on en déduit que  $\vec{B} = \vec{0}$ . En appliquant Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, on en déduit que les sources du champs sont aussi nulles.

**Propriété.** Dans un conducteur parfait, le champ électromagnétique ainsi que la densité de charge et de courant volumique sont rigoureusement nulles.

La seconde propriété découle directement des équations de Maxwell-Gauss et Ampère.

🔴🔴🔴 **Attention !** Il n'est pas possible d'appliquer directement les équations de Maxwell volumique sur l'interface séparant le conducteur parfait d'un autre milieu. Il est donc possible qu'une charge et un courant **surfactive** apparaissent sur une telle interface.

### 2.2 L'onde stationnaire

#### 2.2.1 Notations en incidence normale

On reprend les notations de la figure 1. On considère une onde plane incidente arrivant du vide (milieu 1) vers le milieu 2 en incidence normale sur l'interface. On néglige tout phénomène dispersif ou d'atténuation de l'onde.

L'onde incidente s'écrit sous la forme générale

$$\underline{\vec{E}}_i(t, x) = \underline{E}_{0,i} \exp [j(\omega t - k_i x)] \vec{e}_y .$$

En application de la loi de Maxwell-Faraday, la relation de structure est valide et on a

$$\underline{\vec{B}}_i(t, x) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i(t, x) = \frac{E_{0,i}}{c} \exp [j(\omega t - k_i x)] \vec{e}_z .$$

Cette onde donne naissance à deux ondes planes : une réfléchi par l'interface et une transmise. En effet, le champ incident agit sur les porteurs de charges du conducteur qui, mis en mouvement, sont à l'origine d'un champ réfléchi et transmis. Ces champs ont nécessairement la même pulsation que le champ incident car celle-ci est celle des courants correspondant au mouvement des charges.

On note

$$\underline{\vec{E}}_r(t, x) = \underline{E}_{0,r} \exp [j(\omega t + k_r x)] \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_r(t, x) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r(t, x) ,$$

et

$$\underline{\vec{E}}_t(t, x) = \underline{E}_{0,t} \exp [j(\omega t - k_t x)] \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_t(t, x) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}}_t(t, x) .$$

**Propriété.** Lors d'une réflexion et d'une transmission, les ondes incidentes, transmises et réfléchies vérifient la relation de structure de l'onde plane. Ce n'est pas le cas de l'onde résultante totale.

On définit les coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  en amplitude par

$$\underline{r} = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} .$$

## 2.2.2 Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

On considère une incidence sur un conducteur parfait. Par définition, il vient  $\underline{\vec{E}}_t(t, \vec{r}) = \vec{0}$  et  $\underline{\vec{B}}_t(t, \vec{r}) = \vec{0}$ .

On applique la relation de passage en  $x = 0$ , il vient

$$\underline{\vec{E}}_t(t, 0) - (\underline{\vec{E}}_i(t, 0) + \underline{\vec{E}}_r(t, 0)) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x .$$

Il vient alors

$$\underline{E}_{0,i} \exp [j\omega t] \vec{e}_y + \underline{E}_{0,r} \exp [j\omega t] \vec{e}_y = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x .$$

En projetant vectoriellement cette relation, on en déduit

$$\underline{E}_{0,i} = -\underline{E}_{0,r} \quad \Rightarrow \quad \underline{r} = -1 .$$

**Propriété.** La charge surfacique  $\sigma$  lors d'une réflexion d'une onde en incidence normale sur un conducteur parfait est nulle.

Le coefficient de transmission en amplitude lors d'une réflexion sur un conducteur parfait vaut  $-1$ , ce qui correspond de façon équivalente à un déphasage de  $\pi$ .

Ce déphasage de  $\pi$  se retrouve en optique lors d'une réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir.

De plus, l'onde incidente et l'onde réfléchi se propageant toutes deux dans le vide à la même pulsation, elles ont nécessairement un vecteur d'onde de même amplitude car  $k_i = \frac{\omega}{c} = k_r$ .

**Propriété.** En incidence normale, les vecteurs d'ondes incidents et réfléchis vérifient la propriété  $\vec{k}_i = -\vec{k}_r$ .

### 2.2.3 Structure d'onde stationnaire

Pour simplifier, prenons  $E_{0,i} = E_0$  réel.

On en déduit que l'onde dans le milieu 1 s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= \Re \left( \vec{E}_i(t, x) + \vec{E}_r(t, x) \right) \\ &= E_0 \Re \left( \exp [j(\omega t - kx)] - \exp [j(\omega t + kx)] \right) \vec{e}_y \\ &= E_0 \Re \left( \exp [j\omega t] (-2j \sin(kx)) \right) \vec{e}_y \\ &= 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y .\end{aligned}$$

Il ne s'agit plus d'une onde progressive, l'onde globale  $s(x, t)$  ne se propage pas, elle oscille sur place. On pourra regarder cette [animation](#) [1] sur les ondes stationnaires pour bien visualiser le phénomène.

**Définition.** Une **onde stationnaire** est une onde qui ne se propage pas et qui peut se mettre sous la forme

$$s(x, t) = f(t)g(x) .$$

**Remarque :** Une onde stationnaire ne se propage pas mais est la somme de deux ondes se propageant dans des directions opposées.

De même, on en déduit l'expression du champ magnétique

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, t) &= \frac{k}{\omega} \Re \left( \vec{e}_x \wedge \vec{E}_i(t, x) - \vec{e}_x \wedge \vec{E}_r(t, x) \right) \\ &= \frac{E_0}{c} \Re \left( \exp [j(\omega t - kx)] + \exp [j(\omega t + kx)] \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{E_0}{c} \Re \left( \exp [j\omega t] (2 \cos(kx)) \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z .\end{aligned}$$

On constate que les champs n'oscillent pas en même temps, ils sont déphasés de  $\pi/2$ .

De telle expression du champ, on applique la relation de structure et il vient

$$\vec{0} - \vec{B}(0, t) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_x$$

car le champ est nul dans le conducteur parfait.

On en déduit l'existence d'un courant surfacique, source des champs réfléchis,  $\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$ .

**Propriété.** L'onde incidente provoque une oscillation des charges sur l'interface. Elles sont alors la source par rayonnement d'une onde incidente.

## 2.3 Cavité à une dimension

Considérons maintenant une cavité à une dimension, autrement dit une zone vide comprise entre deux conducteurs parfaits situés en  $x = 0$  et  $x = L$ .

### 2.3.1 Les modes propres

La relation de passage en  $x = 0$  implique des champs comme décrit au paragraphe précédent. De plus, la relation de passage appliquée en  $x = L$  implique  $\vec{E}(L, t) = \vec{0}$  pour tout  $t$ . On a donc

$$\sin(kL) = 0 \quad \implies \quad kL = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

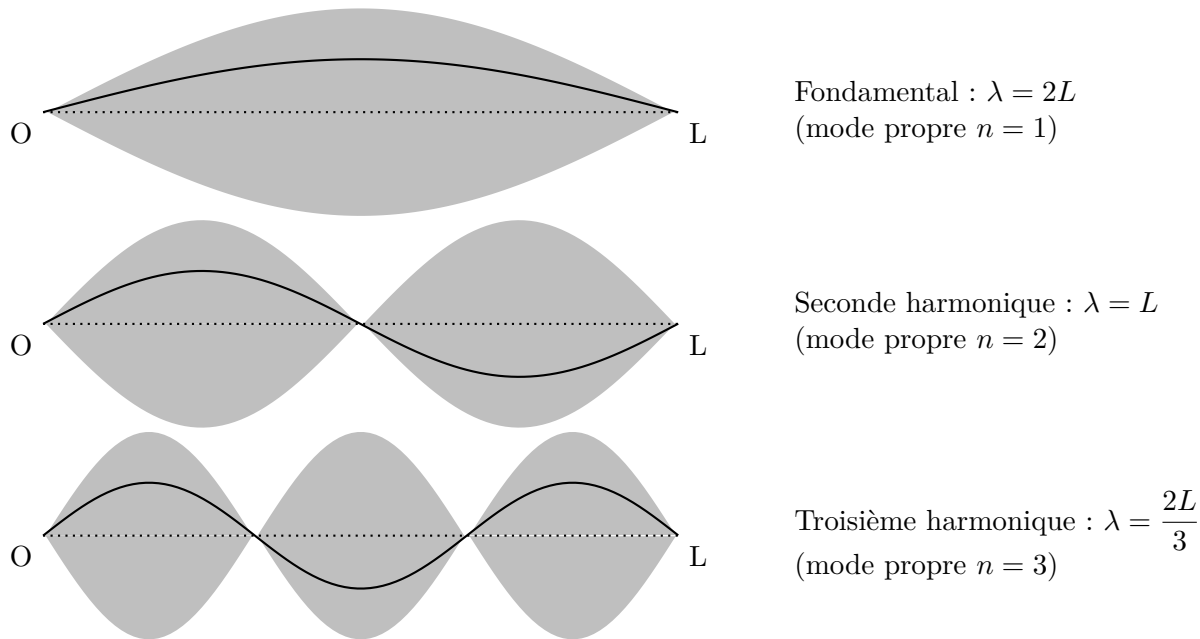
**Propriété.** Le champ électromagnétique confiné dans une cavité composée de deux conducteurs parfaits à une dimension a un nombre d'onde quantifié. **Les pulsations des ondes stationnaires sont des multiples d'une pulsation fondamentale  $\omega_1$ , soit, avec  $n \in \mathbb{N}^*$**

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = k_1 c = \frac{c\pi}{L} .$$

Ces fréquences possibles sont appelées **fréquences propres** du système. Les solutions correspondantes sont appelés **modes propres**, représentés figure 3.

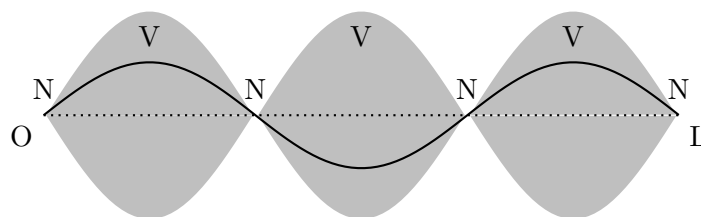
Ainsi, seules certaines longueurs d'onde (ou certaines fréquences) peuvent donner naissance à une onde stationnaire.

Pour se représenter ces modes propres, on peut utiliser l'[animation](#) [2].



**Fig. 3** – Représentation de différents modes propres du champ confiné.

**Définition.** On nomme **nœuds** (N) les positions pour lesquelles  $y(x, t)$  est nul et **ventres** (V) les positions pour lesquelles  $y(x, t)$  est maximum, comme représenté figure 4.



**Fig. 4** – Les nœuds et les ventres d'un mode propre.

### 2.3.2 Aspects énergétiques

Commençons par calculer la densité d'énergie  $w$ , on a

$$w(x, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(x, t)}{2} + \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t)^2 \sin^2(kx)^2 + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)^2 \cos^2(kx)^2 .$$

On peut calculer la valeur moyenne temporelle de cette grandeur en utilisant  $\langle \sin^2(\omega t)^2 \rangle = \langle \cos^2(\omega t)^2 \rangle = 1/2$ . Il vient donc

$$\langle w(x) \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

où on a utilisé  $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ .

Ainsi, en **tout point de l'espace**, la valeur moyenne de l'énergie électromagnétique est constante. L'énergie ne se déplace donc pas en moyenne avec le temps et cette moyenne est également répartie dans l'espace.

On peut de même calculer le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi}(x, t) = \frac{\vec{E}(x, t) \wedge \vec{B}(x, t)}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cos(kx) \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \vec{e}_x .$$

En moyenne, ce vecteur est évidemment nul, ce qui est cohérent avec le résultat précédent sur l'énergie électromagnétique.

Mais de plus, pour  $\sin(2kx) = 0$ , soit, avec  $p$  entier,  $x_p = \frac{p\pi}{2k} = \frac{p}{2n}L$ , le vecteur de Poynting est nul. Ainsi, au cours d'une période, l'énergie reste confinée entre deux  $x_p$  consécutifs.

### 2.3.3 Solution générale en régime libre

Dans un milieu de propagation unidimensionnel illimité, grâce au théorème de Fourier, on peut montrer qu'une onde quelconque se décompose en ondes sinusoïdales progressives. Les fréquences de ces composantes sinusoïdales peuvent être choisies librement, en d'autres termes, le spectre du signal est continu.

La limitation spatiale du milieu de propagation conduit à l'apparition de modes propres quantifiés. De manière similaire au milieu illimité, on peut montrer que qu'un signal quelconque est toujours une combinaison linéaire de ces modes propres, mais comme les fréquences sont fixées par le milieu, le spectre du signal est maintenant discret.

**Propriété.** Lorsque que le champ est imposé de façon quelconque dans la cavité, celui-ci est une combinaison linéaire des modes propres possibles. L'énergie de l'excitation est répartie entre les différents modes, on dit que les modes sont peuplés. La répartition de l'énergie dépend de la forme de l'excitation initiale.

### 2.3.4 Propagation d'une onde dans la cavité

Considérons le guidage d'une onde électromagnétique à l'aide d'une cavité d'ondes métallique simple constitué de deux plans conducteurs parfaits parallèles placés en  $z = 0$  et  $z = a$ .

On a vu qu'une onde électromagnétique ne peut pas se propager d'un plan à l'autre, mais elle peut se propager entre eux dans une direction parallèle aux plans. Pour ce problème, on prend une onde de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z) \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y .$$

L'espace entre les deux plans étant le vide, le champ  $\vec{E}$  vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} .$$

En projection sur  $(Oy)$ , et en injectant la forme proposée, on obtient une équation vérifiée par  $E(z)$

$$\frac{d^2 E}{dz^2}(z) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(z) = 0 .$$

Pour respecter les conditions aux limites, on doit avoir  $E(z = 0) = E(z = a) = 0$ . Pour obtenir une fonction susceptible de respecter ces conditions, on doit avoir  $E(z) = \alpha \cos\left(\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}z\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}z\right)$ .

L'annulation en  $z = 0$  impose  $\alpha = 0$ . Celle en  $z = a$  demande d'avoir  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2 \pi^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On en déduit donc

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y.$$

La condition précédemment obtenue permet d'obtenir le vecteur d'onde sous la forme  $k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$ .  
La pulsation de coupure du mode  $n$  vaut donc  $\omega_c = \frac{n\pi c}{a}$ .

L'onde peut se propager dans la cavité, on parle alors de **guide d'onde**.

On constate une zone interdite avant la pulsation de coupure  $\omega_{c,n}$  du  $n$ -ième mode correspond à des vecteurs d'onde imaginaires purs : l'onde ne peut pas se propager. Aux pulsations élevées, la relation de dispersion redevient  $\omega = kc$ , la propagation du signal n'est plus dispersive.

La vitesse de phase se calcule à partir de la relation de dispersion. Pour un mode  $n$  donné, on a

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}}.$$

La vitesse de groupe est définie par  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie.  
En différentiant la relation de dispersion, on trouve  $2\omega \frac{d\omega}{c^2} = 2kdk$  :

$$v_g = \frac{kc^2}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}}.$$

On vérifie notamment  $v_g v_\varphi = c^2$ , et  $v_g < c$ .

Les deux vitesses tendent vers  $c$  aux pulsations élevées. La vitesse de groupe est bien toujours plus faible que la vitesse de la lumière (c'est la vitesse de propagation du signal, elle doit donc être plus faible que  $c$ ).

### 3 Complément : réflexion oblique sur une interface

Cette résultat est hors programme et est donné pour la culture.

#### 3.1 Schéma et notations

Soit une interface entre deux milieux non absorbant, ce qui implique que les vecteurs d'ondes dans ces milieux sont réels.

On considère une onde plane incidente arrivant du milieu 1 vers le milieu 2. Elle s'écrit sous la forme générale

$$\vec{E}_i(t, \vec{r}) = \vec{E}_{0,i} \exp\left[j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})\right].$$

En application de la loi de Maxwell-Faraday, la relation de structure est valide et on a

$$\vec{B}_i(t, \vec{r}) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i(t, \vec{r}).$$

Cette onde donne naissance à deux ondes planes : une réfléchiée par l'interface et une transmise.

On note

$$\vec{E}_r(t, \vec{r}) = \vec{E}_{0,r} \exp\left[j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})\right] \quad \text{et} \quad \vec{B}_r(t, \vec{r}) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_r \wedge \vec{E}_r(t, \vec{r}),$$

et

$$\vec{E}_t(t, \vec{r}) = \vec{E}_{0,t} \exp\left[j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})\right] \quad \text{et} \quad \vec{B}_t(t, \vec{r}) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_t \wedge \vec{E}_t(t, \vec{r}).$$

Ces ondes sont représentées figure 5.



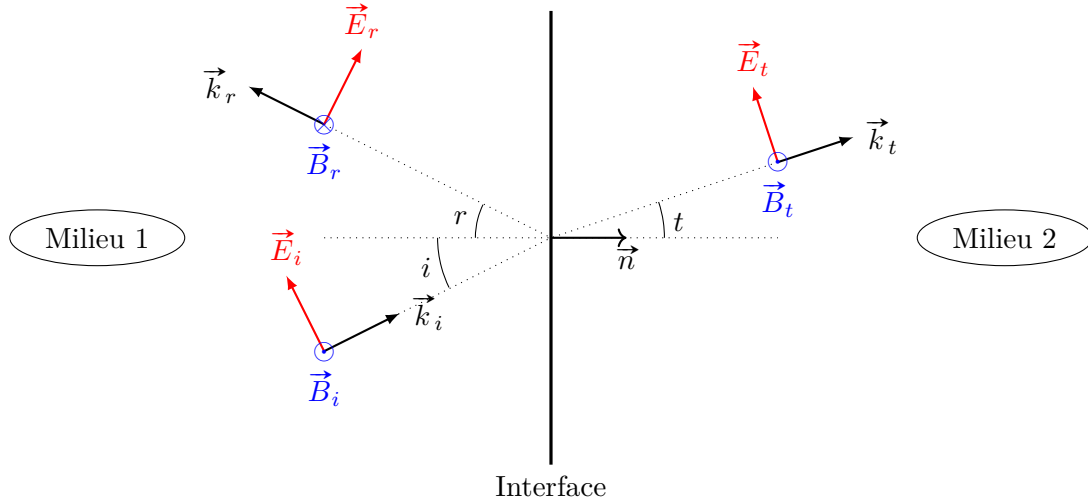


Fig. 5 – Représentation des ondes planes incidentes, transmises et réfléchies.

### 3.2 Application des relations de passage

On applique la relation de passage sur le champ électrique. Les composantes tangentielles de celui-ci sont continues, on a donc, avec  $\vec{r}$  un point de l'interface,

$$(\vec{E}_i(t, \vec{r}) + \vec{E}_r(t, \vec{r})) \wedge \vec{n} = \vec{E}_t(t, \vec{r}) \wedge \vec{n} .$$

On développe cette relation, avec  $\vec{r}$  un point de l'interface,

$$\underline{\vec{E}}_{0,i} \wedge \vec{n} \exp [j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})] + \underline{\vec{E}}_{0,r} \wedge \vec{n} \exp [j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})] = \underline{\vec{E}}_{0,t} \wedge \vec{n} \exp [j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})]$$

que l'on peut écrire

$$\underline{\vec{E}}_{0,i} \wedge \vec{n} + \underline{\vec{E}}_{0,r} \wedge \vec{n} \exp [j([\omega_r - \omega_i]t - [\vec{k}_r - \vec{k}_i] \cdot \vec{r})] = \underline{\vec{E}}_{0,t} \wedge \vec{n} \exp [j([\omega_t - \omega_i]t - [\vec{k}_t - \vec{k}_i] \cdot \vec{r})] .$$

Cette relation doit être vraie en tout instant  $t$ . Nécessairement, cela implique  $\omega_r - \omega_i = \omega_t - \omega_i = 0$ . Toutes les ondes oscillent à la même pulsation. En effet, l'onde incidente met en vibration les charges du milieu qui oscillent et émettent en conséquences les ondes transmises et réfléchies. Ainsi, la pulsation de l'onde incidente est la pulsation des charges en mouvement qui est nécessairement la pulsation des ondes transmises et réfléchies.

De plus, cette relation est aussi vraie pour tout point de l'interface. Il faut donc que les facteurs de phase soit indépendants du point de l'interface. Comme  $\vec{r}$  sur l'interface est orthogonal au vecteur  $\vec{n}$ , on a nécessairement

$$\vec{k}_r - \vec{k}_i = \alpha \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{k}_t - \vec{k}_i = \beta \vec{n} .$$

On rappelle que les vecteurs d'ondes sont les vecteurs porteurs de l'énergie, qui représentent en optique géométrique la direction des rayons lumineux. Ainsi On retrouve la première loi de Snell-Descartes qui dit indique que les rayons réfléchis et transmis sont dans le plan formé par le rayon incident et la normale au diopre.

De plus, en projetant la première relation sur le plan de l'interface, il vient

$$k_r \sin r + k_i \sin i = 0 .$$

Or dans le milieu 1 linéaire, on a  $k_r = k_i$  car les pulsations des deux ondes sont les mêmes. On retrouve donc la seconde loi de Snell-Descartes sur la réflexion  $r = -i$ .

Enfin, en projetant la seconde relation sur le plan de l'interface, il vient

$$k_t \sin t - k_i \sin i = 0 .$$

Cette fois, les nombres d'ondes sont différents car les milieux sont différents. En divisant par  $\omega$ , on trouve

$$\frac{1}{v_{\phi,2}} \sin t - \frac{1}{v_{\phi,1}} \sin i = 0$$

avec les vitesses de phase. Dans un milieu diélectrique usuel, on rappelle que l'indice optique est défini par  $n = \frac{c}{v_{\phi}}$ , on a donc

$$n_2 \sin t = n_1 \sin i .$$

On retrouve donc la troisième loi de Snell-Descartes sur la réfraction.

## Références

- [1] [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Ondes/ondes\\_stationnaires/stationnaires.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php)
- [2] <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/oemstat.html>